

## Интегрированный урок «Математика + Экономика»

Учитель экономики Михаил Юрьевич Присталов

Учитель математики Галина Игоревна Третьякова

«Математика в экономике»

Мы объединим здесь несколько тем из разных уроков.

### Тема «Проценты». Зачем нужны проценты?

Задача, важная для понимания природы процентов. Задача показывает различность абсолютных и относительных величин.

**Витя потерял 100 рублей, а Рома потерял 1000 долларов. Кто из них потерял более значительную сумму? Кто из них расстроился больше?**

Очевидная разница абсолютной величины потерь подталкивает к «само собой разумеющемуся» ответу о большей печали Ромы. Следует «расшифровка» ситуации (для большей конкретности используются фотографии одного из учеников класса и Романа Абрамовича).

*До момента утраты у Виктора было 100 рублей.*

*Сколько у него осталось в результате потери 100 рублей?*

*Каков процент Витиной потери?*

*До потери 1000 долларов у Романа было 15 миллиардов 300 миллионов 240 тысяч долларов.*

*Теперь у него осталось всего лишь 15 миллиардов 300 миллионов 239 тысяч долларов.*

*Каков процент потери Романа?*



Важно, останавливаясь на теме процентов, артикулировать значимость в экономике именно **относительных**, а не **абсолютных** величин. Ровно поэтому столь значима в экономике работа с процентами. Проценты возможны и актуальны лишь в мире **отношений** (сравнений и связей), а не в мире «самодостаточностей» (вещей-в-себе).

Соответственно, отметим большую роль в экономике величин **динамического** плана. Например, инфляционных показателей.

Темпов роста и темпов прироста (ВВП и т.п.).

### Составление «процентного» кейса

Как известно, закон Парето («принцип Парето», «принцип 20/80») в наиболее общем виде формулируется так: «20% усилий дают 80% результата».

Взяв тему «80%», мы сделаем подборку примеров (из самых разных сфер). Они-то и станут материалом для последующего обсуждения. Приближенным к кейсу заданием будет такое: попробуйте по приведённым примерам (скажем, по теме «40%») дать анализ трендов российского общества. Вот несколько «80%-ых» примеров:

- 2012 г. – Автомобили иностранных производителей заняли **80%** российского парка новых машин.
- 2013 г. – Согласно данным опросов Союза потребителей, в прошлом году **80%** россиян столкнулись с некачественными товарами и услугами.
- 2011 г. – **80%** всех заявлений по кражам, где потерпевшими являются подростки, - кражи сотовых телефонов.
- 2013 г. – **80%** россиян считают для себя неприемлемым усыновление ребенка.

- 2013 г. – **80%** россиян положительно оценили законопроект о запрете чиновникам иметь за рубежом счета и ценные бумаги.
- 2013 г. – **80%** пользователей доверяют мнению друзей из социальных сетей больше, чем мнению своих реальных друзей.
- 2012 г. – **80%** россиян не читали Конституцию.
- 2011 г. – Почти **80%** жителей РФ никогда не были за границей (данные ФОМ).

Проценты как повод для размышления. Сюжеты различны. Например, демография. Примерно 60% населения Туниса моложе 20 лет. Доля населения в возрасте 60 лет и старше варьируется от 2% в Катаре и ОАЭ до 30% в Японии.

Задание. Объясните значительную разницу доли пожилых людей в различных регионах России. Например, Корякский автономный округ – 8%, Ивановская область – 23%, Республика Дагестан – менее 10% и т.д. Как от возрастной структуры населения могут зависеть инвестиции?

### *Проценты и юмор*



Эпизод из фильма «Луковые новости» (*The Onion Movie*):

Признано, что человек страдает ожирением, если жира у него 55%. Новое «определение» ожирения повышает это число до 95%. В итоге число людей, страдающих ожирением, снижается с 200 млн до 185 млн.

В одной из серий «Компьютерщиков» (*The IT Crowd*) сайт, который определяет дату смерти по описанию образа жизни человека, предсказывает Рою (работнику службы техподдержки) смерть через пару дней. Мосс (коллега Роя) его успокаивает, говоря, что

прогнозы подобных прог верны не более, чем на 76%.

### *Тема «Сложные проценты»*

В экономике большое значение имеют **сложные проценты**. И, соответственно, задачи (например, по расчёту временной стоимости денег в финансовом менеджменте) на **кампаундинг** (наращение) и **дисконтирование** (приведение). Сложные проценты применяются в долгосрочных финансово-кредитных операциях. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, часто называют **капитализацией** процентов. **В процессе начисления сложных процентов на единичную сумму  $P$  возникает геометрическая прогрессия со знаменателем  $(1 + i)$ , наращенная сумма  $S$  представляет собой последний член этой прогрессии  $P * (1 + i)^n$ .**

**Геометрическая прогрессия. Теория шести рукопожатий.** Люди знакомы между собой в среднем через 4,74 рукопожатия – ученые (Два любых человека в мире знакомы через 4,74 «рукопожатия», а не через шесть, как считалось ранее. Теория «шести рукопожатий», которую в 1929 г. высказал фантаст Фридеш Каринти (Frigyes Karinthy), утверждает, что любой человек в мире может связаться с другим через цепочку из пяти посредников).

**Математик Эфтиму и вампиры.** Если предположить, что первый в мире вампир появился 1 января 1600 года (именно с начала XVII века возникли первые упоминания об этих существах), а в то время на Земле жило примерно 537 миллионов человек, то при частоте укусов раз в месяц всё население планеты превратилось бы в вампиров всего за два с половиной года.

**Эта (и подобные ей) задача может стать заданием для самостоятельного расчёта.**

**Тема «Теория вероятности». Парадоксы вероятности** («Монти Холла», «двух конвертов» и др.). **Вероятность: задачи и примеры.**



**«Розенкранц и Гильденстерн мертвы».**

Герои фильма (и пьесы) Тома Стоппарда сталкиваются с «нарушением законов» вероятности – многократным выпадением орла на монете (решка как будто исчезает вовсе). Это заставляет их даже задуматься, не остановилось ли время?

В фильме «Четыре комнаты» (Four Rooms) пари связано с «безотказной» зажигалкой «Zippo» (юмор в том, что эта зажигалка, символизирующая надёжность, не срабатывает в первой же попытке из десяти). Знаменитая сцена «русской рулетки» есть в «Охотнике на оленей» (The Deer Hunter) М.Чимино.

**Задание.** Выполнить серию бросков (монеты, игральной кости), фиксируя результаты.

**Лотереи.** Май 2013 г.: джекпот Powerball в 600 млн долл. сорвал житель Флориды. Шансы на выигрыш составляли 1:175000000.

Пять триллионов к одному!!? Five trillion to one! Участнику лотереи удалось выиграть в неё дважды, угадав по пять номеров. Причём числа в обоих случаях совпали! (The odds of his first win were 2,330,636 to one. But the second time, the odds shot up to 5,400,000,000,000 to one). Почему вероятность выпадения джекпота (шести, а не пяти шаров) была в этом случае гораздо выше (14000000 к одному)?

Футбольный оракул Пауль (осьминог). По утверждению Дэвида Шпигельхалтера, серия удачных предсказаний, сделанных осьминогом, – чистое везение. Как и при игре в орлянку, выпадение 9 или 10 «орлов» или «решек» подряд само по себе ничем особенным не является, хотя и примечательно с точки зрения игрока. По оценке Betfair (онлайн-сервис азартных игр), вероятность угадывания первых шести результатов на чемпионате мира 2010 года составляла 0,245 % или 1 к 408.



Примеры из покера являются хорошими практическими задачами на вероятность наступления того или иного события. См. Р.Шапошников, С.Колыхматов. «Покер и вероятность».

Какова вероятность прихода туза и короля червей двумя первыми картами?

**С вероятностями может быть связан широкий спектр заданий.** Например. Кто чаще рождается: мальчики или девочки (в России, в Петербурге)? Кого из них больше в вашем классе (школе, школах города)?



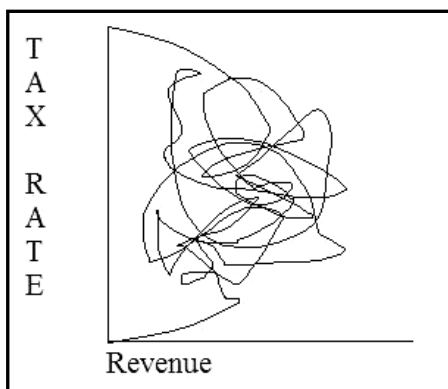
## Тема «Графики и функции»



**Проект: «Разыщите функцию».**  
 Взяв, например, **квадратичную функцию**, исследуем те экономические проблемы, где она может быть полезна. Функция полезности. Функция издержек. Кривые спроса и предложения. КПВ и КТВ (кривые торговой и производственной возможностей). Кривая Лаффера. С помощью квадратичной функции могут описываться тренды (временные тенденции). Хотя чаще используется для этого линейная функция.

Интересные графические задания есть в пособиях по микроэкономике Ю.В.Таранухи.

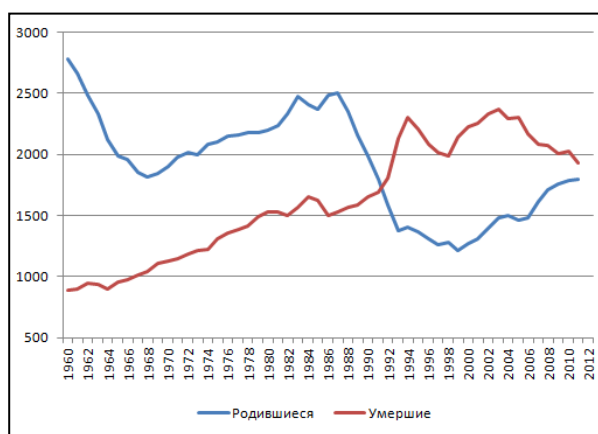
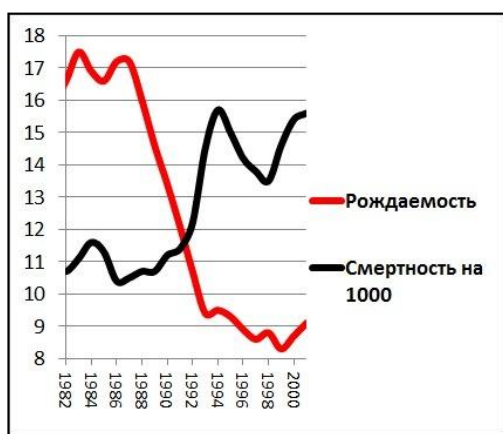
Пример с кривой Лаффера:



На картинке – шарж на кривую Лаффера

**Кривая Лаффера** была якобы начерчена Лаффером в полемическом порыве на столовой салфетке. Президент США Рейган вспоминал, что как-то сам «побывал» на кривой Лаффера. Он рассказывал: «Я начал сниматься в фильмах во время Второй мировой войны. В то время высшая ставка подоходного налога приближалась к 90%. Вы снимались в четырёх фильмах, а затем попадали в категорию людей, подпадавших под самое высокое налогообложение. Поэтому мы все бросали работу после съёмки в четырёх фильмах и уезжали из страны».

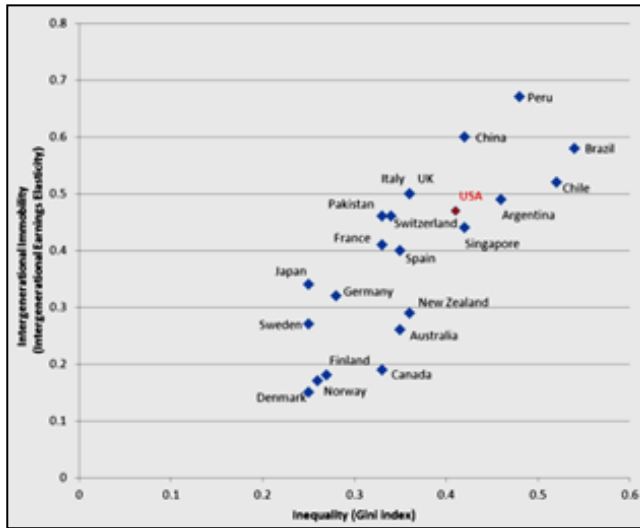
Проблема кривой Лаффера в том, что трудно понять, где именно находится «Гринвич-Виллидж», а где «Гарлем» (bad Side этой кривой).



### Необычные графики

Какая графическая фигура называется Русский крест? В демографии – это превышение числа умерших над числом родившихся. Почему график справа кажется более пологим?

**Задание.** Найдите другие графики этого типа.

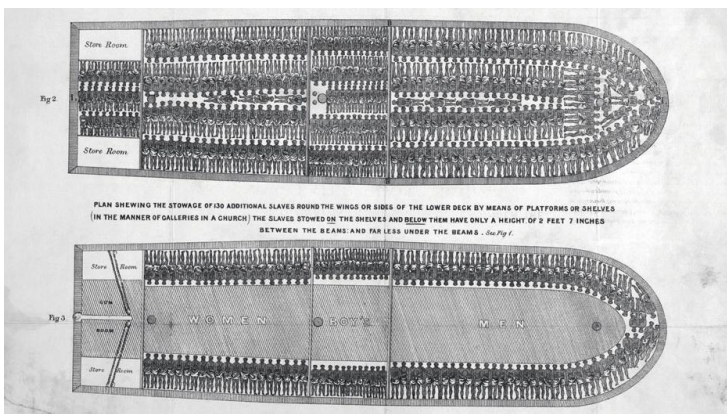


Great Gatsby Curve - Wikipedia.  
 «Кривая Великого Гэтсби»: знаменитый роман Фицджеральда дал имя графику, в котором пересекаются данные, измеряющие степень неравенства доходов – на горизонтальной оси, и межпоколенную эластичность доходов (т.е. связь между доходами родителей и их потомков) – на вертикальной. Это барометр социальной мобильности (см. График Великого Гэтсби, который потряс Америку).

Любопытна идея выбора «**графика года**» (см. BBC had a great idea).  
 См. The Most Important Graphs of 2011, 2012: The Year in Graphs – Washington Post и др.  
**Задание.** Выбираем «Графики года» на российском материале.

Сравнительно новый инструмент – «**Карты рынка**».

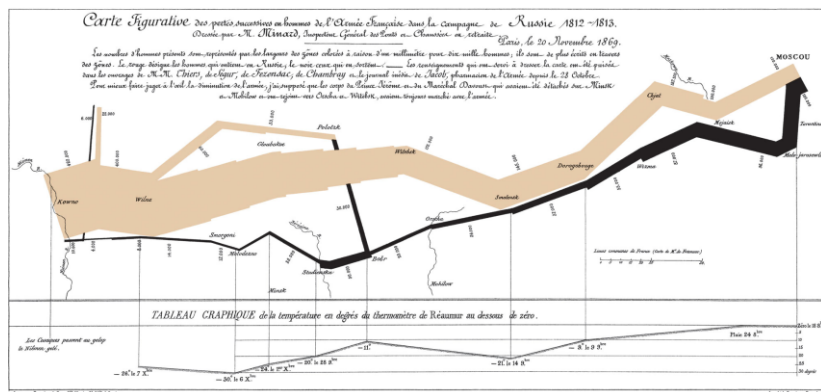
Каждый прямоугольник на этой карте соответствует одной из компаний, которая торгуется на ММВБ. Площадь прямоугольника пропорциональна либо капитализации компании, либо обороту на ММВБ за текущий день. Цвет прямоугольника зависит от того, растёт или падает сегодня стоимость акций компании. Для удобства все компании объединены по отраслям. Лидеров роста или падения можно подсветить отдельно. По каждой отрасли отдельно показывается её рост в течение последней торговой сессии. Достаточно навести мышкой на любой прямоугольник, и во всплывающем окошке сразу будет видно, как изменилась цена акций компании, оборот по этим акциям на ММВБ и капитализация. Кликнув на прямоугольник, вы получите график её акций, ссылки на справки о компании или публикации о ней. Существуют HeatMap и по западным рынкам. См. ВЕДОМОСТИ - Карта рынка (www.vedomosti.ru/finance/ marketmap/bigmap.shtml).



«**Математика и визуализация**»  
 Знаменитая диаграмма – гравюра, изображающая корабль Brooks (и способ «оптимального» размещения в нём рабов), созданная в 1788 году в Плимуте Обществом содействия отмене работорговли (Eye 82 Slave ship Brookes detail 1, Infographic: The Slave-Ship Chart).

## График потерь французской армии в ходе Русской кампании 1812-1813 гг.

(изготовлена Жозефом Минаром, генерал-реvisorом мостов и дорог в отставке. Париж, 1869 г.). Количество человек в армии отображается шириной цветной полосы. Одному миллиметру ширины полосы соответствует десять тысяч человек. Широкая коричневая соответствует числу войск по ходу движения к Москве, узкая чёрная – от Москвы (обратно). На карте указаны не только города и реки, но и температура. См. [File:Minard, Charles Joseph Minard | Cartographia](#).



### Как представить диаграмму?

20%-ые круговые диаграммы похожи на Пакмана. Картинки могут заменять диаграммы.

**Задание.** Как эффективно показать при помощи графиков и диаграмм инфляционные показатели? Отраслевую структуру экономики? Демографический рост? Имущественное расслоение общества? И т.д.

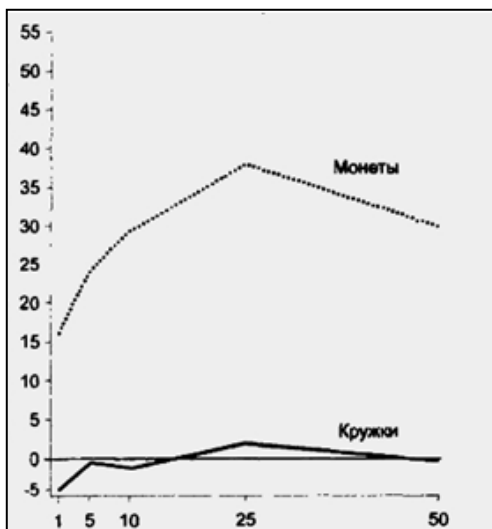
### Тема «Экономическая психология»

«Феномен градиента цели» (близость цели усиливает мотивационное напряжение: вот почему некоторые заключенные совершают побег незадолго до освобождения); закон Йеркса – Додсона (эффективность простой деятельности пропорциональна силе мотивации, но эффективность сложной деятельности при чрезмерной мотивации падает); кривые Дж.Дэвиса; «марки» Э.Берна; «рентные установки» (например, использование собственной болезни как козыря); экономика семьи (Гэри Беккер рассмотрел ситуацию заключения брака как экономический контракт; рождение ребёнка с точки зрения сравнения выгод и издержек; преступление и наказание как экономическую проблему и т.д.); дилеммы Кольберга (ставящие морально неоднозначные задачи выбора); теория «ментальной бухгалтерии» (mental accounting, она описывает процессы кодирования, категоризации и оценки человеком своего экономического состояния) и т.д.

«Социальная» математика. Брюнер и Гудман (1947) показали, что, например, размер одних и тех же монет дети из бедных семей оценивают как больший по сравнению с детьми из богатых семей.

Десятилетним детям было предложено угадывать по размерам световых кружков на экране, каким по достоинствам монетам они соответствуют. Дети состоятельных родителей практически не ошибались. А вот дети из бедных семей то и дело завышали величину монет, из чего следовало, что в их воображении даже по внешнему виду монеты крупнее, чем на самом деле. В продолжение этих опытов был проведен сравнительный анализ металлических денег, выпускаемых в 84 странах. Отчетливо выявилась тенденция – чем беднее страна, тем более крупные по величине деньги находятся там в обращении.





### Один из опытов Брюнера – Гудмана.

Горизонтальная шкала – достоинство монеты; вертикальная – степень отклонения оценки от реальной величины. Величины монет, т.е. социально значимых объектов, оценивалась на 15-35% выше, чем кружочков.

**Парадокс революций:** им, как правило, предшествует не упадок, а подъём. Дэвис показал, что революционным кризисам почти всегда предшествует рост качества жизни. Кризис может разразиться, когда состояние (даже рост!) удовлетворения потребностей все сильнее отстает от роста ожиданий.



### «Теплокровная» вероятность

#### Д.Канеман и А.Тверски – теория перспектив

«Рациональный выбор, ценности и фреймы»: статья положила начало так называемой поведенческой экономике (behavioral economics). Вместо теорий принятия решений, основывающихся на теории вероятностей, Д.Канеман и А.Тверски предложили новую теорию – теорию перспектив (prospect theory). Согласно этой теории, нормальный человек не способен правильно оценивать будущие выгоды в абсолютном выражении – он оценивает их в сравнении с некоторым общепринятым стандартом, стремясь, прежде всего, избежать ухудшения своего положения. С помощью теории перспектив можно объяснить многие нерациональные поступки людей, не объяснимые с позиций «человека экономического». Несколько кейсов.

**Кейс №1. Пример 1:** Согласитесь ли вы участвовать в игре, в которой с вероятностью 10% выпадает выигрыш \$95 и с вероятностью 90% – потеря \$5? **Пример 2:** Согласны ли вы заплатить \$5 за участие в лотерее, в которой с вероятностью 10% выпадает выигрыш \$100 и с вероятностью 90% – проигрыш?

Несмотря на то, что эти две задачи предлагают, очевидно, два объективно идентичных варианта выбора, 55% респондентов выражают различные предпочтения. Рассмотрение \$5 в качестве платежа делает игру более приемлемой, чем представление этой суммы как потери.

**Кейс №2.** Представьте, что вы столкнулись с необходимостью принять одновременно два решения. Сначала рассмотрите оба решения, а потом укажите то из них, которое вы предпочитаете.

**Решение 1.** Сделайте выбор между: А. гарантированным выигрышем в \$240 (84%)

В. 25%-ной вероятностью получить \$1000 и 75%-ной вероятностью не получить ничего (16%)

**Решение 2.** Сделайте выбор между: С. гарантированными потерями в \$750 (13%)  
D. 75%-ной вероятностью потерять \$1000 и 25%-ной вероятностью не потерять ничего (87%)

Большинство респондентов продемонстрировало несклонность к риску, сделав выбор в пользу гарантированного выигрыша в первом случае; даже большее число респондентов продемонстрировало склонность к риску, сделав выбор во втором случае, когда речь шла о гарантированных потерях.

**Кейс №3. Оцените вероятность.** Линде 31 год. Она замужем, искренна и полна оптимизма. В колледже ее специализацией была философия. В студенческие годы она живо интересовалась вопросами дискриминации и другими социальными проблемами, участвовала в демонстрациях против ядерного оружия. Основываясь на этом описании, оцените, какой из двух выводов вероятнее: а) Линда - кассир в банке, б) Линда - кассир в банке и активистка феминистского движения.

Большинство испытуемых (82%) предпочли вариант Б. Согласно Канеману и Тверски, это произошло благодаря *эвристике репрезентативности*.

Эвристика репрезентативности подразумевает, что люди принимают решения, основываясь на каких-либо стереотипах, предрассудках, а не на основе другой информации, которая у них имеется. Ведь в данной ситуации люди должны понимать, что вероятность появления одного события (Линда - кассир) гораздо выше, чем появления двух событий сразу (Линда - кассир и активистка феминистического движения). Однако люди выбирают второй вариант просто потому, что Линда соответствует стереотипу феминистки.

См. «Компьютеры, мозг, познание: успехи когнитивных наук» (Изд. «Наука», 2008).

### **Тема «Математика и мнемотехника»**

**Вяч.Иванов, «Чёт и нечет»:** Выдающийся индийский математик Рамануджан, не получивший никакого систематического образования (до приезда в Европу изучивший только одну книгу по математике), знал каждое число (включая и очень большие) как своего знакомого... Во время пребывания Рамануджана в лондонской больнице его навещил математик Харди. «Номер такси, на котором я приехал, скучный. 1729 – произведение  $7 \cdot 13 \cdot 9$ ». «Нет Харди, это очень интересное число. Это – наименьшее число, которое можно представить как сумму кубов двумя разными способами:  $9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$ »... Рамануджан не раз угадывал приближенные выражения очень сложных функций с конечной ошибкой.



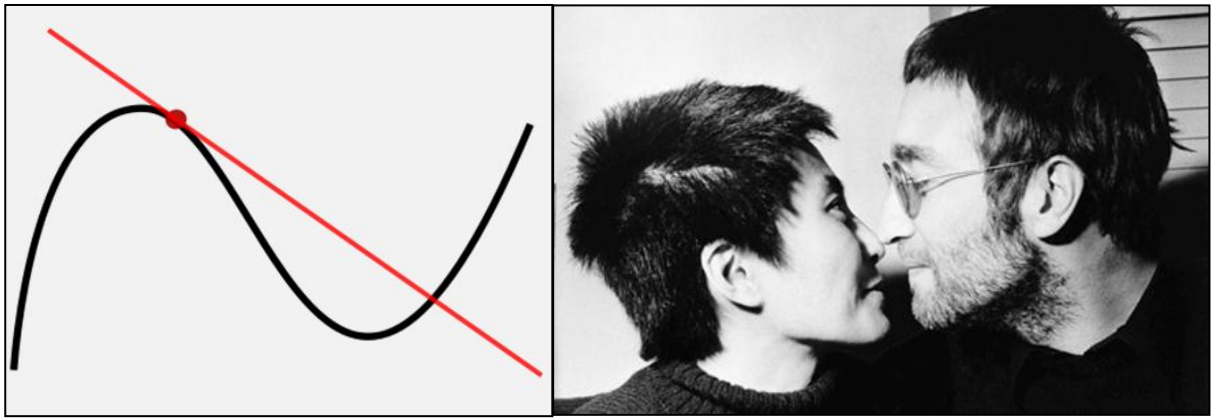
### **Фоторобот числа**

Даниил Хармс: «Мой номер телефона 32 – 08. Легко запомнить: 32 зуба, 8 пальцев».

**Задание:** Представьте «портфолио» того или иного числа. Речь может идти не только о числовом, но и о художественном его выражении.

**Возможно создание настольной игры.** Ведущий вытаскивает карточку с числом (например, «20»), предлагая командам дать максимально возможное число примеров (из истории, литературы, физики и т.д.) с этим числом.





**Темы: «Экстремумы функции»; «Максимизация и минимизация функций»**  
(Попытка М. Пристолова сделать производные темой культурологического эссе)

### **Предельные величины в культуре или О Функциях, о Фаусте, о Фудзияме**

Почему владельцы недвижимости нередко обращаются при ее продаже к услугам специальных агентов (профессионалов продаж)? Потому что предполагается, что дилер (знакомый с рынком недвижимости) сможет **максимизировать стоимость объекта**.

Максимизация – главная задача спортсмена, желающего оказаться в **главном старте сезона** в наилучшей форме. Стало быть, и ключевая способность выдающихся атлетов – умение максимизировать усилие в критические моменты.

Одна из стержневых проблем современного человека – неумение сполна раскрывать себя в **значимые моменты времени**.

Скажем, в чём нередкая горечь ЕГЭ? Человек обладает некой функцией знания (возможно, с усердием и кропотливостью собранного), но в нужный момент **не умеет это знание извлечь**. Вот сакраментальный смысл максимизации: когда точный ответ приходит вслед за тем, как трепещущий листок уже вынут из рук; когда анекдот усваивается дольше, чем кора в медвежьем желудке.

В собрании пословиц Даля есть такая народная мудрость (заодно и христианская максима): **«Живи и до веку, и до вечера»**. «Живи до веку» предполагает длительность и масштаб, Надежду и Память, неизбежность лишений и утрат, настроенность на долгий путь. «Крутая» функция жизни требует жизненной силы, воли к бытию. «Живи до вечера» понимает проживание каждого дня как последнего и незаместимого.

Зацветший дуб или небо Аустерлица над князем Андреем – производные, поскольку диагностируют его **местоположение в своей собственной жизни**. Красота Элен – функция. Она уже не зависит и от неё самой. Мраморная, статуарная красота Элен узнаваема, предсказуема, графична (как портрет функции). А красота «некрасивой» княжны Марии или Наташи Ростовой? Почему важнейшие герои Толстого почти всегда лишены канонической красоты? Потому что ему важна красота не как то, что есть, то, что дано, а как то, что прорезается в некоем озарённом миге – мгновенном румянце, блеснувшей улыбке, взгляде, преображающем лицо.

Гречневая каша – функция. А «добавить соли по вкусу» – производная.

**«Тихо ползет улитка по склону Фудзи – до самой вершины»**. Речь идет, конечно, о функции. Какой? Труда, терпения, каждодневного упорства. Такая протестантская (ну, в нашем случае – самурайская) улитка.

Время, стирающее города – функция. А вот **«Остановись, мгновенье! Ты прекрасно!»** – разумеется, производная. Притом та самая, – максимизирующая, равная нулю, то есть невыразимая ни в словах, ни в красках.

Ещё раз: что такое производная? **Точка, через которую мы что-то узнаём о функции**. При этом саму функцию мы можем и не видеть. А вот **функцию нашей жизни** мы видим или нет? Конечно, нет. Её, разве что, только Бог видит. И каждый человек нуждается в

том, чтобы время от времени понимать, где он и что с ним происходит. Без этих производных человек впотьмах.

**Собаки – закоренелые маргиналисты.** Возьмём Моську. Моська на производных собаку съела. Сами посудите. Всего одна эскапада и о тебе все шепчут: «Смотрите, это Моська. Гроза слонов, гордость нашего двора». Другой всю жизнь вкалывает, а его в упор не видят.

Почему далеко не каждый человек решится отнять кость даже у дружелюбного пса? Потому что **его добродушие – это функция.** Но есть святые для собаки вещи. В момент, когда вы беретесь рукой за кость, которую крепко сжимают собачьи челюсти, вы рискуете обрести касательную к этой функции. Теперь посмотрим на представителей конкурирующей научной школы. Какой подход к жизни свойствен кошкам? Скорее, иронический, скептический, цинический. Кто-нибудь наблюдал у кошки собачье ликование при виде еды или фазу острого горя во время ухода хозяина на работу? Кошки гораздо легче ассоциируются с философскими размышлениями. С **долговременными стратегиями** вообще. Кот Мурр неспешнее Шехерезады. Матроскин – просто копит. Кошка может вынашивать план похищения сардельки часами. У собаки все уже написано на лице. Зная об особом восприятии Вечности древнеегипетской цивилизацией, понимаешь, почему именно кошки столь священны в Древнем Египте. А вот блистательная античная Греция не знала кошек. А окажись они там (могли бы: Платон, Пифагор и иные бывали в Египте), то едва ли прижились бы. Греки просто не поняли бы этих постоянных намеков, неаристотелевой кошачьей логики («ни да, ни нет»).

А вот ещё неплохая «история с производными». **«Функция творчества».** Можно ли представить в виде графика творческую жизнь писателя или актёра? Как в ней отметить производные – лучшие роли, сильные книги? Насколько различными будут эти функции у разных людей? И для разных людей. Мне, скажем, последние работы Говорухина или Михалкова кажутся всё слабее и слабее. Но, должно быть, есть и те, кто считает иначе? Даже условная функция покажет падения и взлёты. Подъёмы и кризисы (и чем чаще человек (или, например, государство) преодолевало последние, тем увереннее мы можем сказать о силе (личности или культуры). Или об отсутствии гармонии и уравновешенности? Как «обозначатся» запои и депрессии О.Даля или В.Высоцкого? «Поздний» Толстой – упадок его как писателя или нет? А может быть «функция человека» и «функция автора» не обязаны совпадать? Здесь припоминаются, например, «родительские функции».

**Задание.** Напишите эссе на тему «минимизации функции». (Подумайте, с чем её можно связать. Когда следует минимизировать функцию «родительского участия»? Как минимизировать опрометчивый расход энергии? И т.п.).

Полный текст уроков – на сайте школы №6 (раздел «Интегративные уроки», некоторые из приведённых сюжетов находятся в цикле «Информатика»).